Tale è la condizione -dell'esistenza di una superficie ortogonale alle linee (i).

Giova distinguere tre casi :

i°) Quando l'equazione (4) è identica, l'equazione (3) ha un integrale finito con una costante arbitraria., epperò le superficie ortogonali sono in numero infinito ;

2°) Quando l'equazione (4) non è identica, ma stabilisce fra le *t, u, v* una relazione che soddisfa all'equazione differenziale (3), questa non possiede che un integrale particolare, che è la stessa equazione (4), epperò non esiste che una sola superficie ortogonale;

3°) Finalmente, se non si verifica alcuno dei due casi precedenti, non esiste alcuna superficie ortogonale e quindi il problema non ammette soluzione.

Nei primi due casi l'equazione ordinaria in E, v), £ della superficie ortogonale si ottiene eliminando le *t, u, v* fra le equazioni (i) e l'integrale dell'equazione (3).

IL

L'equazione (4) si semplifica alquanto allorché la variabile *t* è l'arco della linea *(ti, v),* contato da un certo punto, che si può considerare come l'intersezione della linea stessa con una superficie iniziale arbitraria, la cui equazione si otterrebbe ponendo *t* — *O* nelle (i) ed eliminando *u,v.* In questa ipotesi si ha jT=i, eia condizione (4) assume la forma più semplice

r. WJ $$dU \quad d\,^\wedge . _n d\,7 \quad r/dU_$$
$$\sim d^\wedge\sim\sim d7 + u\, dt \sim^\wedge\sim dT — °'$$

Questa circostanza si verifica particolarmente nel caso, degno di speciale considerazione, in cui le linee del sistema (i) sieno rette. Infatti le equazioni (i) assumono allora la forma :

(6)

dove X, 7, Z sono i coseni degli angoli che la retta (M, *v)* fa coi tre assi; *x, y,* ^ sono le coordinate del punto d'intersezione della retta variabile colla superficie iniziale, *t* la porzione di retta compresa fra questa superficie e il punto (£, vi, C). Le sei quantità x, *y,* £, X, *Y, Z* sono funzioni determinate delle due variabili *u* e *v.* In questo caso si ha

$d\,v$ ' a T;